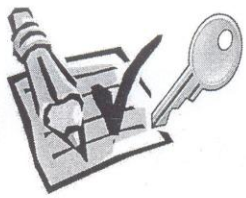


سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان
مرکز آموزشی فرزانگان ۲-تهران

راهنمای تصحیح درس: جبر و احتمال
نام دبیر/دبیران: مرادی
تاریخ آزمون: ۹۱/۱۰/۲۴
پایه: سوم ریاضی

بارم

-۱

$P(1): 1 \leq \frac{2\times 1}{2} = 1$ پایه استقرا

$P(k): 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq \frac{2k}{k+1}$ فرض استقرا

$P(k+1): 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{2(k+1)}{k+2}$ حکم استقرا

به طرفین فرض $\frac{1}{(k+1)^2}$ را اضافه می‌کنیم داریم:

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

ثابت می‌کنیم:

$$* \quad \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{2k+2}{k+2}$$

$$\frac{2k^2+2k+1}{(k+1)^2} \leq \frac{2k+2}{k+2} \iff (k+2)(2k^2+2k+1) \leq (2k+2)(k+1)^2 \iff$$

$$n \leq 2n \iff 1 \leq 2$$

تمامی روابط فوق برگشت‌پذیرند پس نامساوی * برقرار است.

-۲

$n=0 \quad v_0 = 2 \qquad n=1 \quad v_1 = 3$

$P(k): v_k = 2^{k+1}$ فرض استقرا

$P(k+1): v_{k+1} = 2^{k+2}$ حکم استقرا

بارم

$$u_{k+1} = ۳u_k - ۲u_{k-1} = ۳(۲^k+۱) - ۲(۲^{k-1}+۱) = ۳\times۲^k + ۳ - ۲^k - ۲$$

$$u_{k+1} = ۲^k(۳-۱) + ۱ = ۲^{k+1} + ۱$$

۳-

دو طرف مثبت

$$|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^۲+b^۲} \iff$$

$$a^۲\sin^۲ x + b^۲\cos^۲ x + ۲ab\sin x\cos x \leq a^۲+b^۲ \iff$$

$$a^۲(1-\sin^۲ x) + b^۲(1-\cos^۲ x) - ۲ab\sin x\cos x \geq 0 \iff$$

$$a^۲\cos^۲ x + b^۲\sin^۲ x - ۲ab\sin x\cos x \geq 0 \iff$$

$$(a\cos x - b\sin x)^۲ \geq 0$$

۴- برهان خلف: فرض می‌کنیم که n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد پس

$n = ۳k+۱$ یا $n = ۳k+۲$

$$n = ۳k+۱ \longrightarrow n^۲ = ۹k^۲ + ۶k + ۱ = ۳\underbrace{k(۳k+۲)}_{k'} + ۱ = ۳k' + ۱$$

بنابراین $n^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ✗

$$n = ۳k+۲ \longrightarrow n^۲ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۴ = ۳\underbrace{(۳k^۲ + ۴k + ۱)}_{k''} + ۱ = ۳k'' + ۱$$

بنابراین $n^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ✗

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

بارم

۵ـ خیر زیرا فرض کنیم $a=2+\sqrt{2}$ و $b=2-\sqrt{2}$ داریم :

$$a+b = 2+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 4 \notin \emptyset^c$$

۶ـ مجموعه A را می‌توان به صورت زیر افراز کرد.

$$\underbrace{\{2n,1\} \quad \{2n-1,2\} \quad \{2n-2,3\} \quad \dots \quad \{n+1,n\}}$$

تعداد مجموعه‌ها $= n$

طبق اصل لانه ی کبوتر، تعداد $n+1$ کبوتر در n لانه توزیع شده است.

یعنی $n+1$ عدد را باید از n مجموعه بالا انتخاب کنیم پس در هر انتخاب حداقل

دو عدد وجود دارد که مجموع آنها $2n+1$ می‌باشد.

۷ـ ۱۱ مهره، طبق اصل لانه‌ی کبوتری (تعداد لانه‌ها $= 10$)

$n=10$

$k=1 \qquad m>10\times 1 \quad , \quad m\in \mathbb{N} \Rightarrow m=11$ کمترین تعداد مهره‌ها که باید انتخاب شود

۸ـ

$$A_1=[-1,3] \quad A_2=[-2,2] \quad A_3=[-3,1] \quad A_4=[-4,0]$$

$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = [-1,0] \qquad \bigcup_{i=1}^{4} A_i = [-4,3]$$

بارم

۹-

الف) $(A\cup B)\Delta C = (A-C)\cup(B-C)\cup[(C-B)-A]$

$(A-C)\cup(B-C)\cup[(C-B)-A] = (A\cap C')\cup(B\cap C')\cup[(C\cap B')\cap A'] =$

$[C'\cap(A\cup B)]\cup[C\cap(A'\cap B')] = [(A\cup B)-C]\cup[C-(A\cup B)] =$

$(A\cup B)\Delta C$

ب) $A\cup(A\cap C) = A$

$A\cup(A\cap C) = (A\cap M)\cup(A\cap C) = A\cap(\overset{M}{\widetilde{M\cup C}}) = A$

۱۰-

$(A\cap B) = (A\cap C)$ و $(A\cup B) = (A\cup C)$

$\underbrace{B\cup(A\cap B)}_{\text{جذب } = B} = B\cup(A\cap C) \longrightarrow B = \underbrace{(B\cup A)}_{(A\cup C)}\cap(B\cup C) \longrightarrow$

$B = (A\cup C)\cap(B\cup C) = C\cup\underbrace{(A\cap B)}_{A\cap C} = \underbrace{C\cup(A\cap C)}_{\text{جذب}} = C$

۱۱-

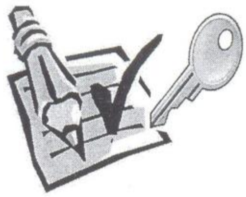
$A'\cup(B-A) = [(A'\cup B')\cup[(A\cap B)'\cap C]]$

$A'\cup(B\cap A') = A'$ جذب

$[(A'\cup B')\cup[(A'\cup B')\cap C]] = A'\cup B'$ جذب

$\Rightarrow A'\cup B' = A' \longrightarrow B'\subset A'$

بنابراین $\underline{\underline{A\subset B}}$



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان
مرکز آموزشی فرزانگان ۲ - تهران

راهنمای تصحیح درس:
نام دبیر/دبیران:
تاریخ آزمون:
پایه :

بارم

۱۲- فرض کنیم $A \subseteq B$ ثابت می‌کنیم $P(A) \subset P(B)$

$$X \in P(A) \Rightarrow X \subset A \xrightarrow{A \subset B} X \subset B \Rightarrow X \in P(B)$$

بنابراین $P(A) \subset P(B)$

برعکس: فرض می‌کنیم $P(A) \subset P(B)$ ثابت می‌کنیم که $A \subset B$

$$x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \xrightarrow{P(A) \subset P(B)} \{x\} \in P(B) \Rightarrow$$

$$\{x\} \subset B \Rightarrow x \in B$$

بنابراین $A \subset B$ است.